Univers en théorie des types : Cumulativité et polymorphisme

Damien Rouhling

ENS Lyon

4 septembre 2014

Types dépendants

- Familles de types : $B : A \to \mathcal{U}$

Types dépendants

- Familles de types : $B : A \to \mathcal{U}$
- Fonctions dépendantes : $\Pi_{x:A} B$
- Paires dépendantes : $\Sigma_{x:A} B$

- Univers à la Martin-Löf : $\mathcal{U} : \mathcal{U}$

Univers en théorie des types

- Univers à la Martin-Löf : $\mathcal{U} : \mathcal{U}$
- Paradoxe de Girard

Univers en théorie des types

- Univers à la Martin-Löf : $\mathcal{U} : \mathcal{U}$
- Paradoxe de Girard
- Hiérarchie d'univers : $\mathrm{U}_0 : \mathrm{U}_1 : \mathrm{U}_2 : \ldots$

Cumulativité

Idée : univers de Grothendieck, si $t : \mathrm{U}_n$ alors $t : \mathrm{U}_{n+1}$

Cumulativité

Idée : univers de Grothendieck, si $t : \mathrm{U}_n$ alors $t : \mathrm{U}_{n+1}$

Concrétisation : sous-typage

$$\frac{\vdash t : T \qquad \vdash T \leq T'}{\vdash t : T'} \qquad\qquad \frac{}{\vdash \mathrm{U}_n \leq \mathrm{U}_{n+1}}$$

Cumulativité

Idée : univers de Grothendieck, si $t : \mathrm{U}_n$ alors $t : \mathrm{U}_{n+1}$

Concrétisation : sous-typage

$$\frac{\vdash t : T \qquad \vdash T \leq T'}{\vdash t : T'} \qquad\qquad \frac{}{\vdash \mathrm{U}_n \leq \mathrm{U}_{n+1}}$$

$$\frac{\vdash R' \leq R \qquad x : R' \vdash S \leq S'}{\vdash \Pi_{x:R} S \leq \Pi_{x:R'} S'}$$

Exemples

$$\vdash \Pi_{x:\mathsf{U}_1}\mathsf{U}_1 \leq \Pi_{x:\mathsf{U}_0}\mathsf{U}_2$$

Exemples

$$\vdash \Pi_{x:\mathsf{U}_1}\mathsf{U}_1 \leq \Pi_{x:\mathsf{U}_0}\mathsf{U}_2$$

$$\vdash \lambda X.\lambda x.x : ?$$

Exemples

$$\vdash \Pi_{x:\mathrm{U}_1}\mathrm{U}_1 \leq \Pi_{x:\mathrm{U}_0}\mathrm{U}_2$$

$$\vdash \lambda X.\lambda x.x : \Pi_{X:\mathrm{U}_n} X \to X$$

$$\Pi_{X:\mathrm{U}_0} X \to X \not\leq \Pi_{X:\mathrm{U}_1} X \to X$$

Polymorphisme d'univers

Concept : réutiliser des définitions en ne changeant que le niveau des univers

$$\forall n, \vdash \lambda X.\lambda x.x : \Pi_{X:\mathrm{U}_n} X \to X$$

Aspect pratique : formalisation de la théorie homotopique des types (Vladimir Voevodsky)

Différentes tentatives

- Robert Harper et Robert Pollack (91) : calcul des constructions
- Judicaël Courant (02) : contraintes d'univers explicites
- Hugo Herbelin (05) : optimisation
- Matthieu Sozeau et Nicolas Tabareau (14) : extension de Coq

Différentes tentatives

- Robert Harper et Robert Pollack (91) : calcul des constructions
- Judicaël Courant (02) : contraintes d'univers explicites
- Hugo Herbelin (05) : optimisation
- Matthieu Sozeau et Nicolas Tabareau (14) : extension de Coq
- Conor McBride (11) : univers explicites

La proposition de McBride

- Univers explicites dans les déclarations
- Polymorphisme d'univers : t^+
- $\mathrm{U}_n^+ = \mathrm{U}_{n+1}$
- Si $\Gamma \vdash t : T$ alors $\Gamma^+ \vdash t^+ : T^+$
- Esquisse

Gestion des constantes

- $\mathrm{U}_n^+ = \mathrm{U}_{n+1}$
- $\mathrm{Nat}^+ = \mathrm{Nat}$
- $(\mathrm{Natrec}_T\ n\ z\ s)^+ = \mathrm{Natrec}_{T^+}\ n^+\ z^+\ s^+$
- Si $\mathrm{id} : \Pi_{X:\mathrm{U}_0} X \to X$ alors $\mathrm{id}^+ : \Pi_{X:\mathrm{U}_1} X \to X$
- Définitions $(c = t : T)$ et déclarations $(c : T)$

Contribution

Objectif : préciser la proposition de Conor McBride.

Justifier l'opération $.^+$:

- Pas de sémantique ensembliste
- Preuve de normalisation

Implémentation :

- Aspect algorithmique : système bidirectionnel
- Programme en Haskell[1]

1. Basé sur un travail de Cyril Cohen, Thierry Coquand, Simon Huber et Anders Mörtberg.

Normalisation par évaluation

- **Évaluation** des termes en valeurs sémantiques, réalisée dans un environnement
- **Réification** des valeurs sémantiques aux termes en forme normale
- Typée ou non

Systèmes bidirectionnels

Deux jugements :

- Vérification de type : $\Gamma \vdash t \Leftarrow T$
- Inférence de type : $\Gamma \vdash t \Rightarrow T$

Une règle importante :

$$\frac{\Gamma \vdash t \Rightarrow T \qquad T \trianglelefteq T'}{\Gamma \vdash t \Leftarrow T'}$$

Conclusion

- Cumulativité : sous-typage
- Polymorphisme d'univers : univers explicites et constructeur $.^+$
- Sémantique : preuve de normalisation par évaluation
- Tests : système bidirectionnel et implémentation